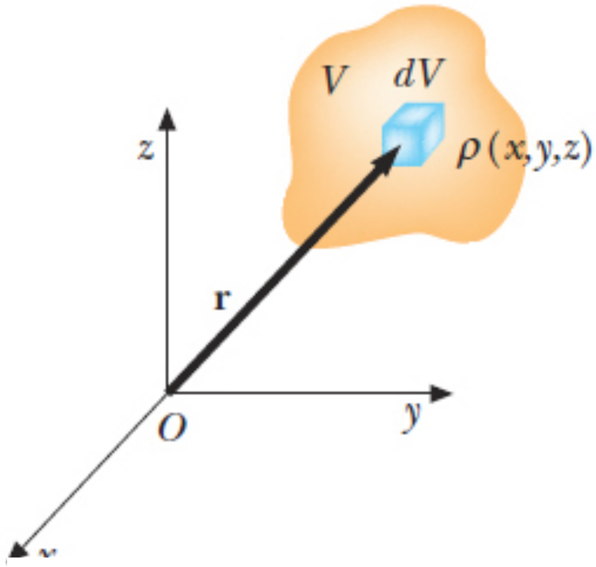
Sistemi continui



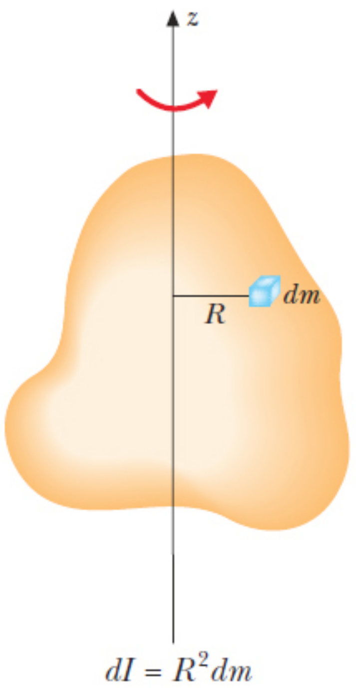
Suddividiamo un corpo continuo in volumetti infinitesimi dV di massa dm, e definiamo la densità

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$m = \int_V \rho dV$$

Se il corpo è omogeneo ρ=cost

In generale per un corpo non omogeneo la densità dipende dal punto considerato ρ(x,y,z)



$$I = \sum_i m_i R_i^2$$ Sistema finito di punti materiali

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho(x,y,z)\, dV$$ Sistema continuo

$$I = \int\int\int R^2 \rho(x,y,z) dx\, dy\, dz$$

L'integrale su dV equivale a calcolare tre integrali su dx, dy e dz

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Centro di massa di un sistema finito di punti materiali

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_V \vec{r}\, dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \vec{r}\, \rho(x,y,z)\, dV}{m}$$

Centro di massa di un sistema continuo

La definizione di centro di massa di un sistema continuo equivale a calcolare tre integrali, uno per ogni coordinata

$$x_{cm} = \frac{\int x\, \rho(x,y,z)\, dV}{m}$$

$$y_{cm} = \frac{\int y\, \rho(x,y,z)\, dV}{m}$$

$$z_{cm} = \frac{\int z\, \rho(x,y,z)\, dV}{m}$$

Esercizio

Un'asta OP di lunghezza L ha massa M e sezione trascurabile. Calcolare il centro di massa nei due seguenti casi:

1) l'asta è omogenea (densità costante)
2) la densità dell'asta varia linearmente lungo l'asta e in P ha densità doppia che in O.

1) La densità lineare è costante $$\rho = \frac{M}{L}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\rho\,dx = \frac{\rho L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$

2) La densità varia linearmente con L fino ad un valore doppio nel punto P $$\rho(x) = \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

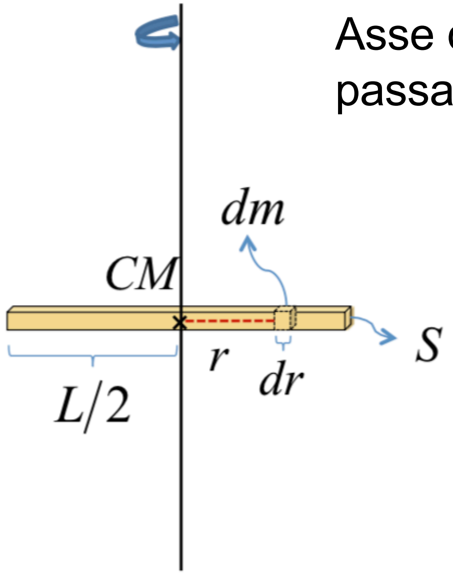
Per ricavare ρ_0 si integra la densità sulla lunghezza della sbarra uguagliando alla massa M

$$M = \int_0^L \rho(x)\,dx = \rho_0 \int_0^L \left(1+\frac{x}{L}\right) dx = \rho_0\left[x+\frac{x^2}{2L}\right]_0^L = \frac{3}{2}\rho_0\,L \longrightarrow \rho_0 = \frac{2M}{3L}$$

$$\rho(x) = \frac{2M}{3L}\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\rho(x)\,dx = \frac{2}{3L}\int_0^L \left(x+\frac{x^2}{L}\right) dx = \frac{2}{3L}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right]_0^L = \frac{2}{3L}\left(\frac{L^2}{2}+\frac{L^2}{3}\right) = \frac{5}{9}L$$

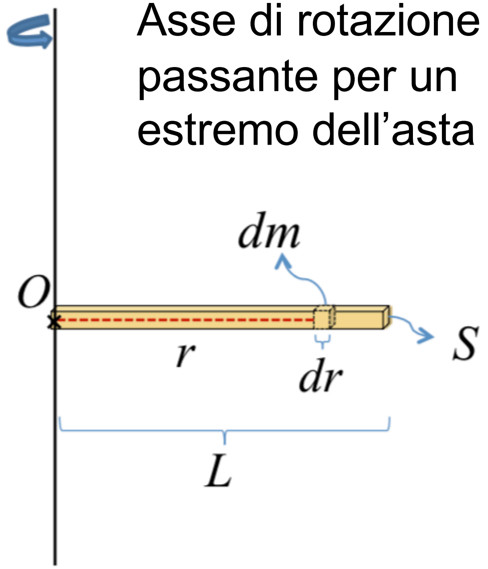
Momento di inerzia di un'asta sottile



Asse di rotazione passante per il CM

$$\rho = \frac{M}{SL}$$ Densità omogenea

$$I_{cm} = \int_V r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho\, S dx = \rho S \frac{1}{3}\frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} M L^2$$



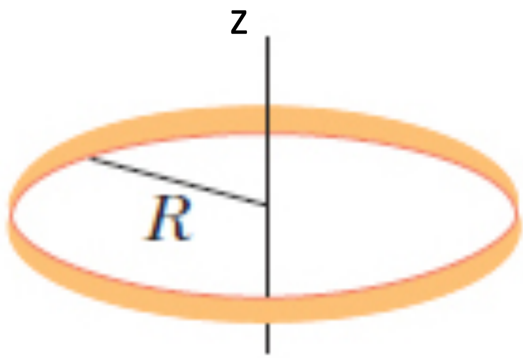
Asse di rotazione passante per un estremo dell'asta

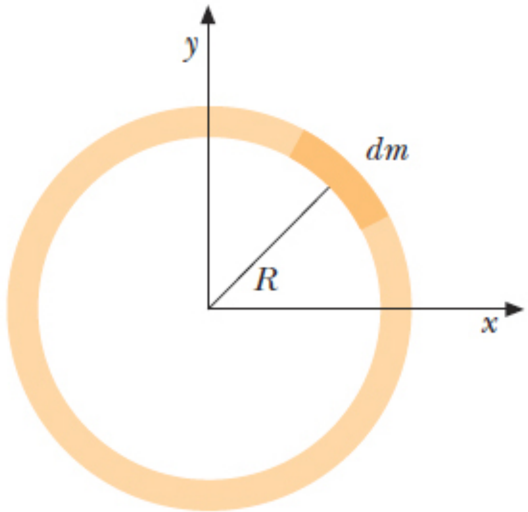
$$I = \int_V r^2 dm = \int_0^L x^2 \rho\, S dx = \rho S \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} M L^2$$

Applicando il teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

Momento di inerzia di un'anello sottile





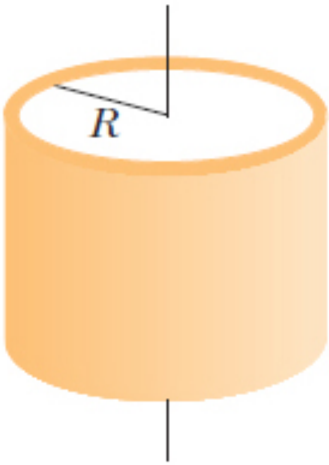
$$\rho = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{2\pi R}$$ Densità lineare omogenea

$$dl = R\,d\phi$$ Elemento infinitesimo di circonferenza

$$I = \int_L R^2 dm = \int_L R^2 \rho\, dl = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R\, d\phi = 2\pi\rho R^3 = MR^2$$

$$I = MR^2$$

Momento di inerzia di un cilindro cavo con pareti sottili



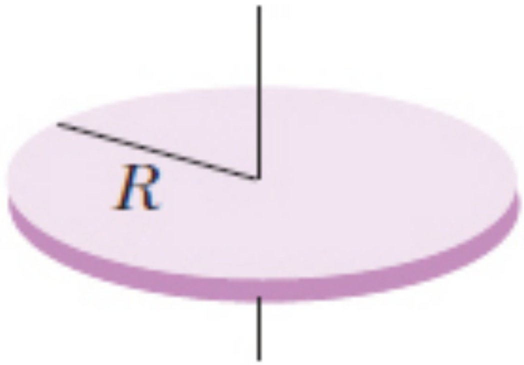
$$\rho = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{2\pi Rh}$$ Densità superficiale omogenea

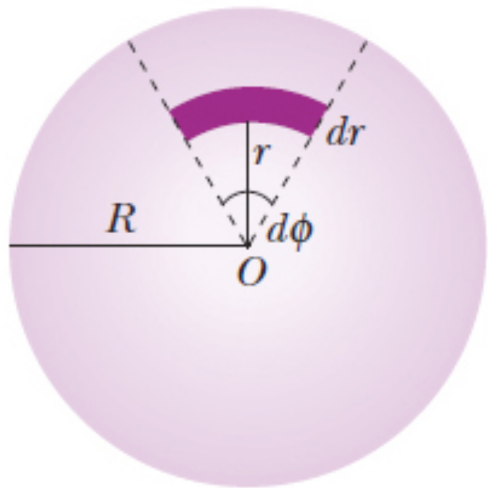
$$dS = \pi R\, d\phi\, dz$$ Elemento infinitesimo della superficie laterale del cilindro

$$I = \int_S R^2 dm = \int_S R^2 \rho\, dS = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} R^2 \rho R\, d\phi = 2\pi \rho R^3 h = MR^2$$

$$I = MR^2$$

Momento di inerzia di un disco





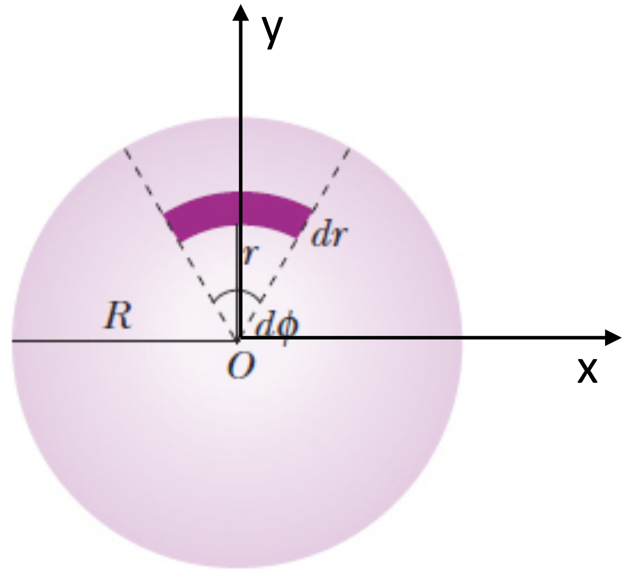
$$\rho = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2}$$ Densità superficiale omogenea

$$dS = r\,dr\,d\phi$$ Elemento infinitesimo dell'area del disco

$$I = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho\, dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 \rho\, r\, dr = 2\pi \frac{1}{4}\rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} M R^2}$$

Nel caso considerato, il momento di inerzia è calcolato rispetto all'asse z, perpendicolare al disco. Se l'asse di rotazione fosse invece nel piano del disco, quale sarebbe il momento di inerzia?



$$I = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dS$$

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2) \rho dS$$

$$I_x = \int_S y^2 \rho dS$$

Consideriamo il disco di spessore trascurabile in z. Per tale motivo non appare la coordinata z dei punti nel calcolo delle distanze dagli assi

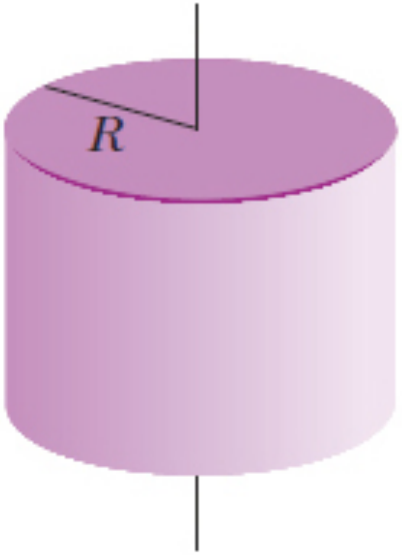
$$I_y = \int_S x^2 \rho dS$$

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} M R^2$$

Per la simmetria del disco nel piano xy → $I_x = I_y$

Momento di inerzia di un cilindro pieno



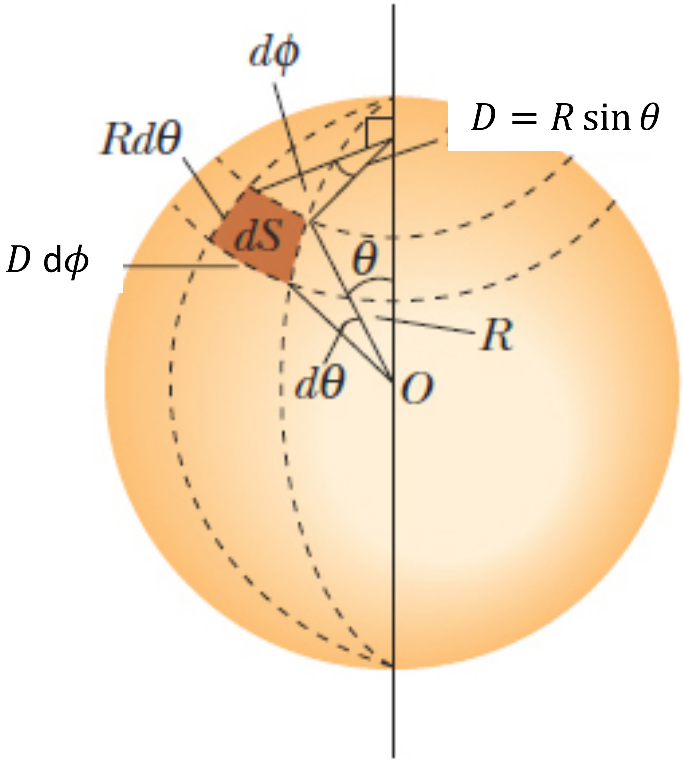
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$ Densità omogenea

$$dV = r\,dr\,d\phi\,dz$$ Elemento infinitesimo di volume del cilindro

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho\, dV = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3\, dr \int_0^h dz =$$
$$= \rho 2\pi \frac{1}{4} R^4 h = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Momento di inerzia di un guscio sferico



$$\rho = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{4\pi R^2}$$ Densità superficiale omogenea

$$dS = R\,d\theta\,D\,d\phi = R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

Elemento infinitesimo di superficie sferica

$$I = \int_S D^2 dm = \int_S R^2 \sin^2\theta\,\rho\,dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} R^4 \rho\,\sin^3\theta\,d\theta = 2\pi\rho R^4 \frac{4}{3} = \frac{2}{3} M R^2$$

$$I = \frac{2}{3} M R^2$$

Integrale usato nel calcolo precedente. Integrazione per parti

$$\int_0^\pi sin^3\theta\, d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta\ \sin\theta\, d\theta =$$

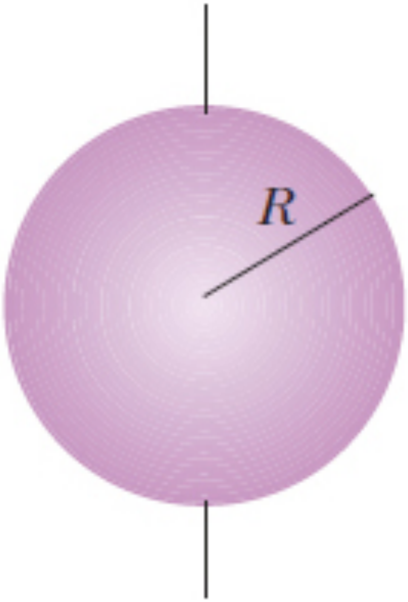
$$= \left[-\sin^2\theta\cos\theta\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi 2\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)\, d\theta = -2\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta + 2\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta =$$

$$-2\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta + 2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$$

Momento di inerzia di una sfera piena



$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ Densità omogenea

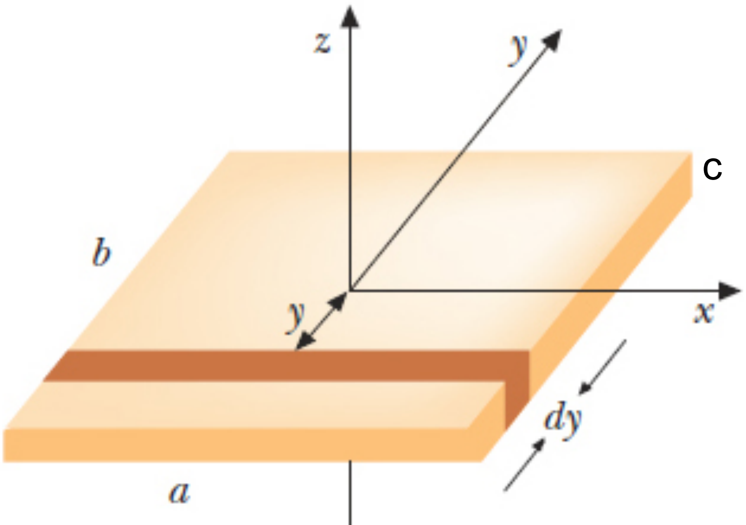
$$dV = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$ Elemento infinitesimo di volume sferico

$$I = \int_V D^2 dm = \int_V r^2 \sin^2\theta\, \rho\, dV = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^4\, dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi\rho \frac{1}{5} R^5 \frac{4}{3} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Momento di inerzia di un parallelepipedo



$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{abc}$$ Densità omogenea

$$dV = dx\,dy\,dz$$ Elemento infinitesimo di volume

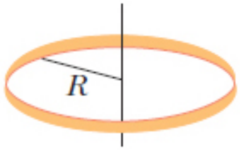
$$I = \int_V D^2 dm = \int_V \left(x^2 + y^2\right)\,\rho\,dV =$$

$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 + y^2\right)\,dx =$$

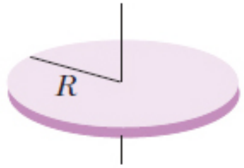
$$= \rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \rho c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{a^3}{12} + y^2 a\right) dy =$$

$$= \rho c \left[\frac{a^3}{12} y + \frac{y^3}{3} a\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho abc \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) = M\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right)$$

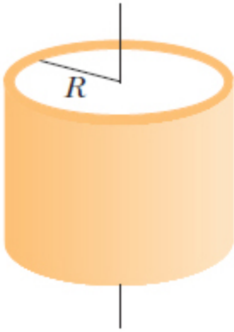
$$I = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$$



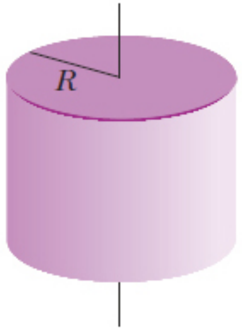
anello sottile
$I = mR^2$



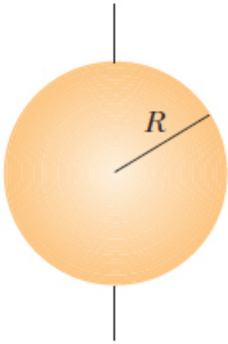
disco $I = \frac{1}{2}\, mR^2$



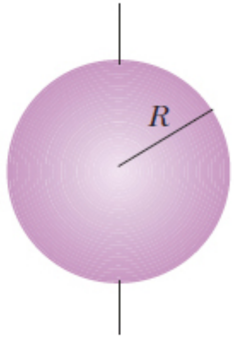
guscio cilindrico sottile
$I = mR^2$



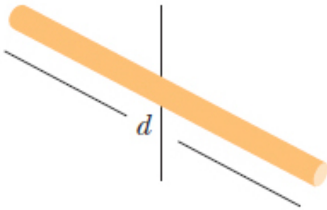
cilindro pieno
$I = \frac{1}{2}\, mR^2$



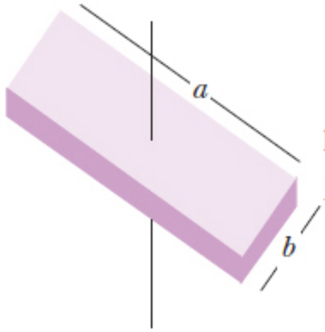
guscio sferico sottile
$I = \frac{2}{3}\, mR^2$



sfera piena
$I = \frac{2}{5}\, mR^2$

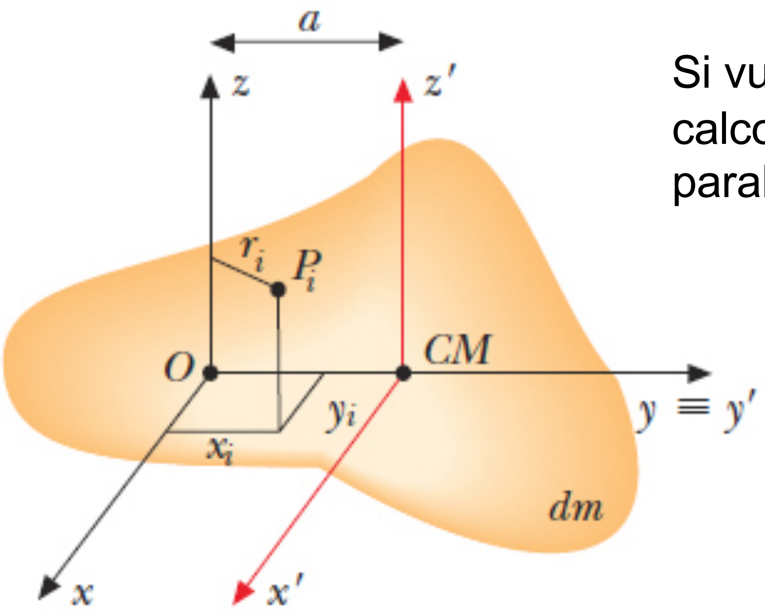


asta sottile
$I = \frac{1}{12}\, md^2$



lastra
$I = \frac{1}{12}\, m(a^2 + b^2)$

Teorema di Huygens-Steiner



Si vuole trovare la relazione fra i momenti di inerzia di un corpo rigido calcolati rispetto ad un asse z' passante per il CM e ad un altro asse z parallelo al precedente e passante per un punto O distante *d* dal CM

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I_{z'} = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right)$$

Senza perdere di generalità scegliamo i sistemi di riferimento xyz e x'y'z' con gli assi y e y' allineati. Le equazioni di trasformazione tra le coordinate nei due sistemi di riferimento sono

$$x_i' = x_i - x_{cm}$$

$$y_i' = y_i - y_{cm} = y_i$$

dove (x_{cm}, y_{cm}) sono le coordinate del CM rispetto ad O. Essendo $y \equiv y'$ → $y_{cm}=0$

Applicando la trasformazione a $I_{z'}$ si ottiene

$$I_{z'} = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right)$$

$$I_{z'} = \sum_i m_i \left(x_i - x_{cm} \right)^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

$$I_{z'} = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i \, x_{cm}^2 - 2 \sum_i m_i \, x_i \, x_{cm} + \sum_i m_i y_i^2$$

$$I_{z'} = \sum_i m_i x_i^2 - m x_{cm}^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_z - m \, x_{cm}^2$$

$$I_z = I_{z'} + m \, x_{cm}^2$$

Quindi il momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse passante per un punto O è uguale al momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse parallelo al precedente e passante nel CM più un termine pari alla massa totale *m* del sistema per la distanza *d* al quadrato fra O e il CM

$$I = I_{cm} + m \, d^2$$

In un fascio di assi paralleli, il momento di inerzia rispetto a quello passante per il CM è minimo (d=0)